SORBONNE UNIVERSITÉ
UE - LU3MA263
THÉORIE DE LA MESURE ET PROBABILITÉS

LICENCE DE MATHÉMATIQUES L3
ANNÉE 2021–22

Contrôle Continu 3

Questions de cours

a) Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$, un espace mesuré. Soit $f_n : E \to [0, +\infty], n \in \mathbb{N}$, une suite d'applications $\mathscr{E}$-mesurables. En utilisant le théorème de convergence monotone, montrer le théorème d'interversion série-intégrale positive :

$$\int_E \big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\big) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n d\mu.$$

b) Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$, un espace mesuré. Soit $f : E \to \mathbb{R}$, une application $(\mathscr{E}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Donner la définition de f est μ-intégrable.

Exercices

1. Soit $\mathscr{A} := \{A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) : A = -A\}$ (par définition $-A = \{-a : a \in A\}$).

a) Montrer que $\mathscr{A}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

b) Les applications $f : x \mapsto x^2, g : x \mapsto x^3, h : x \mapsto e^x$ sont-elles $(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurables ? $(\mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurables ? $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-mesurables ?

Solution de l'exercice 1.

a) Une autre description pour $\mathscr{A}$ est $\mathscr{A} = \{A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) : x \in A \text{ si et seulement si} -x \in A\}$.
On a clairement $\mathbb{R} \in \mathscr{A}$.
Soit $A \in \mathscr{A}$, alors $x \notin A$ si et seulement si $-x \notin A$, donc $\mathbb{R}\backslash A \in \mathscr{A}$.
Soient $A_n \in \mathscr{A}, n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n &\iff \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } x \in A_k \\ &\iff \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } -x \in A_k \\ &\iff -x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n. \end{aligned}$$

Ainsi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$. On conclut donc que $\mathscr{A}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

b) i) Pour tout $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on a $f(x) \in B$ si et seulement si $f(-x) \in B$ car $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in E$. Donc $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ et f est $(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. On prend le fermé $\{1\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, alors $g^{-1}(\{1\}) = \{1\} \notin \mathscr{A}$. On prend le fermé $\{e\} \in \mathscr{B}(R)$ et $h^{-1}(\{e\}) = \{1\} \notin \mathscr{A}$. Donc ni g ni h n'est $(\mathscr{A}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

ii) Comme f, g et h sont continues, elles sont $(\mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

iii) On peut montrer que f est $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-mesurable avec le même argument que dans i). Soit $A \in \mathscr{A}$, $g(x) \in A$ si et seulement si $-g(x) \in A$. Mais $-g(x) = g(-x)$, donc $x \in g^{-1}(A)$ si et seulement si $-x \in g^{-1}(A)$. Ainsi g est $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-mesurable. On prend $\{-e, e\} \in \mathscr{A}$, on remarque que $h^{-1}(\{-e, e\}) = \{1\} \notin \mathscr{A}$ donc h n'est pas $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-mesurable.

2. Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction $(\mathscr{E}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit $A_n = \{x \in E : 2^n \leq |f(x)| < 2^{n+1}\}$.

a) Montrer que $A_n \in \mathscr{E}$.

b) Montrer que $E \backslash f^{-1}(\{0\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ et $A_n \cap A_m = \emptyset$ dès que $m \neq n$.

c) On définit
$$g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mathbb{1}_{A_n}.$$
Montrer que $g \leq |f| \leq 2g$.

d) Montrer que g est $(\mathscr{E}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

e) En utilisant le théorème d'interversion série-intégrale positive, montrer que f est μ-intégrable si et seulement si
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(A_n) < +\infty.$$

Solution de l'exercice 2.

a)
$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in E : 2^n \leq f(x) < 2^{n+1}\} \cup \{x \in E : 2^n \leq -f(x) < 2^{n+1}\} \\ &= f^{-1}([2^n, 2^{n+1}[) \cup f^{-1}(]-2^{n+1}, -2^n]). \end{aligned}$$

L'image réciproque d'un borélien est dans $\mathscr{E}$ par la mesurabilité de f, et la tribu $\mathscr{E}$ est stable par union dénombrable, donc $A_n \in \mathscr{E}$.

b) On a $]0, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2^n, 2^{n+1}[$ une union disjointe, donc $A_n \cap A_m = \emptyset$ dès que $n \neq m$. On en déduit aussi que $\mathbb{R} \backslash \{0\} = \big(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2^n, 2^{n+1}[\big) \cup \big(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]-2^{n+1}, -2^n]\big)$. En prenant l'image réciproque (qui commute avec l'union et le passage au complémentaire) des deux membres de cette égalité, on obtient $E \backslash f^{-1}(\{0\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n$.

c) Pour $x \in E$ tel que $f(x) = 0$, on a $g(x) = f(x) = 2g(x) = 0$. Pour $x \in E$ tel que $f(x) > 0$, il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que A_k contienne x (i.e. $2^k \leq |f(x)| < 2^{k+1}$) et donc $g(x) = 2^k \mathbb{1}_{A_k}(x) = 2^k$. Donc $g(x) = 2^k \leq |f(x)| < 2^{k+1} = 2g(x)$.

d) g est une limite simple de fonctions étagées avec $A_n \in \mathscr{E}$ (qui sont $(\mathscr{E}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurables), ainsi elle est aussi $(\mathscr{E}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable.

e) Par le théorème d'interversion série-intégrale positive,

$$\int_E g d\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_E 2^n \mathbb{1}_{A_n} d\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(A_n).$$

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(A_n) < +\infty$, par c) on a $\int_E |f| d\mu \leq 2 \int_E g d\mu < +\infty$, donc f est μ-intégrable. En revanche, si f est μ-intégrable, i.e. $\int_E |f| d\mu < +\infty$, on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(A_n) \leq \int_E |f| d\mu < +\infty$ par c).